

Úvod

Publikace „Metody řešení soustav algebraických rovnic“ je určena především posluchačům učitelských kombinací s matematikou na Přírodovědecké fakultě Univerzity Palackého v Olomouci jako opěrný studijní text ke speciálnímu semináři „Metody řešení matematických úloh“ a také dalším zájemcům o řešení nadstandardních matematických úloh. Obsahově je zaměřena na problematiku elementárních metod řešení náročnějších soustav nelineárních algebraických rovnic a některých diofantovských rovnic — tj. metod, které nevyužívají prostředky vyšší matematiky (speciálně pak numerické metody algebry). V české literatuře se můžeme s podobnou problematikou setkat ve větším rozsahu zejména v publikacích [4] nebo [9] a ve starší brožuře [36].

Tento učební text byl zpracován s cílem lépe osvětlit a přiblížit uvedenou problematiku budoucím (ale také začínajícím) středoškolským učitelům matematiky, a to jak po stránce odborné, tak to stránce didaktické. Jsou zde přitom akcentovány různé přístupy k řešení jednotlivých úloh. Prezentované úlohy přitom záměrně přesahují rámec běžné školské matematiky, neboť při jejich řešeních (použitých metodách řešení) lze uvedenou problematiku lépe a podrobněji komentovat z více pohledů. V textu najdete 50 náročnějších úloh, které jsou převzaty z domácích i zahraničních zdrojů, především pak z matematických soutěží pro žáky středních škol, včetně několika původních autorových úloh. Publikace obsahuje poměrně velké množství řešených i neřešených úloh zaměřených na tzv. cyklické soustavy algebraických rovnic, dále pak na speciální soustavy algebraických rovnic, které obsahují menší počet rovnic (podmínek) než neznámých. Kromě toho se zde můžete seznámit také s některými speciálními metodami pro řešení diofantovských rovnic zejména algebraického typu. Soubor neřešených úloh, které jsou uvedeny v závěrečných dvou částech publikace, poslouží čtenáři k samostatnému procvičení uvedené problematiky. Všechny neřešené úlohy jsou opatřeny výsledky.

Celý učební text byl vytvořen za účinné podpory grantu ESF „Profesní příprava učitelů přírodovědných předmětů pro uplatnění v konkurenčním prostředí“, EU OPVK CZ.1.07/2.2.00/15.0310.

Olomouc, září 2012

autor

Základní použité označení

$\mathbb{N}$ — množina přirozených čísel, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{N}_0$ — množina celých nezáporných čísel

$\mathbb{Z}$ — množina celých čísel

$\mathbb{R}$ — množina reálných čísel

$a \in A$ — a je prvkem množiny A

$a \notin A$ — a není prvkem množiny A

$A \subset B$ — A je podmnožinou B

$A \cup B$ — sjednocení (disjunkce) množin A a B

$A \cap B$ — průnik (konjunkce) množin A a B

$P \wedge Q$ — logická konjunkce výroků P a Q

$P \vee Q$ — logická disjunkce výroků P a Q

(x, y) — uspořádaná dvojice prvků x, y

$a \mid b$ — číslo a je dělitelem čísla b

1. Matematické úlohy a jejich rozdělení

S matematickými úlohami se setkáváme především ve výuce matematiky, ale rovněž v řadě matematických aplikací mimo školskou praxi. Dělíme je z několika hledisek – především pak *podle obsahu*, *podle jejich využití ve školské praxi* a *podle obtížnosti*. Jeden ze základních pohledů při rozlišení matematických úloh je však jejich rozdělení *podle stanoveného úkolu*. Z tohoto hlediska dělíme matematické úlohy dělíme do dvou základních skupin – na úlohy *určovací* a úlohy *důkazové*.

Určovací úlohy dále dělíme na:

- kalkulativní („Vypočítejte ...“, „Určete ...“, „Stanovte ...“, apod.),
- rozhodovací („Rozhodněte, zda ...“),
- konstrukční (geometrické) úlohy,
- úlohy na vyšetřování množin bodů dané vlastnosti.

V tomto textu se budeme zabývat výhradně metodami řešení určovacích úloh, které jsou vymezeny v úvodu publikace, tedy *metodami řešení kalkulativních úloh algebraického typu*, speciálně pak elementárními metodami řešení soustav nelineárních algebraických rovnic a dále řešením některých typů diofantovských rovnic.

Pro úplnost připomeňme, že podle *obsahu* dělíme matematické úlohy na algebraické, aritmetické a číselně-teoretické, geometrické, kombinatorické, statistické a smíšené (např. úlohy z kombinatorické geometrie nebo úlohy z analytické geometrie apod.).

Dalším dělicím kritériem je využitelnost úlohy, tj. podle *postavení úlohy při výuce*. Zde úlohy dělíme na motivační (např. při zavedení oboru komplexních čísel), ilustrativní (v průběhu výkladu), procvičovací (domácí úlohy po probrání určitého tematického celku), diagnostické (písemkové), kontrolní a testovací (větší celky, např. písemná maturita z matematiky apod.).

Posledním kritériem pro rozdělení matematických úloh je jejich dělení *podle náročnosti*. Zde rozlišujeme úlohy na běžné – nenáročné (vhodné k přímému procvičení probraného tématu), středně obtížné (diagnostické, písemkové příklady) a problémové (příklady s „hvězdičkou“, nadstandardní úlohy pro matematické soutěže apod.).

2. Metody řešení soustav algebraických rovnic

Při řešení soustav algebraických rovnic využíváme dvou základních metod, a to metod využívajících *ekvivalentních úprav a postupů* (množina řešení dané úlohy je pak shodná s množinou řešení úlohy, kterou dostaneme po provedení úprav) a dále metod využívajících tzv. *důsledkových úprav*, kdy množina řešení dané úlohy je (ve smyslu inkluze) obsažena v množině řešení úlohy získané po provedení úprav). Při použití důsledkové úpravy je vždy nutno provést zkoušku, která je v takovém případě součástí řešení úlohy. Pomocí ní eliminujeme ta řešení, která nevyhovují dané (původní) úloze. Na tuto skutečnost vždy poukážeme.

K řešení úloh uvedeného typu využíváme často také následující *speciální metody*, kterými jsou:

- aditivní metoda
- eliminační metoda
- metoda dvojmocí (čtverců)
- metoda faktorizace
- metoda nerovností a odhadů
- grafická metoda (postředky analytické geometrie)
- metoda extrémálního prvku (tj. největšího, resp. nejmenšího prvku)
- substituční metoda (speciálně metoda goniometrických substitucí)

Při řešení následně uvedených úloh jsou prezentovány jednotlivé speciální metody pro řešení soustav algebraických rovnic a dále diofantovských rovnic. K řešení některých z nich, jak dále uvidíme, je potřeba kombinování a současného využití několika výše uvedených speciálních metod. U některých z těchto úloh je zmíněna také možnost použití odlišných metod při jejich řešení.

V navazující části této kapitoly uvádíme úplná řešení 13 vybraných příkladů, které pokrývají výše uvedenou tematiku. Ve 4. kapitole pak na ně pak navazují neřešené úlohy určené k samostatnému procvičení této problematiky. Ve 3. kapitole jsou dále uvedena úplná řešení tří diofantovských rovnic (příklady (14)–(16)) a poslední – 17. příklad můžeme chápat jako soustavu algebraických rovnic se speciálním oborem řešitelnosti ($\mathbb{N}_0$), popř. jako soustavu diofantovských rovnic. Nebudeme se zde však zabývat podrobným řešením tzv. *pythagorejské rovnice*, tj. nalezením všech celočíselných řešení rovnice $x^2 + y^2 = z^2$. Její úplné řešení lze nalézt např. v [36].

Výše uvedené speciální metody jsou při řešení těchto úloh zastoupeny následovně (čísla uvedené za jednotlivými metodami korespondují s čísly řešených úloh):

- aditivní metoda: 1 (2. a 3. způsob řešení), 2, 2A, 2B, 2C, 3, 4 (1. způsob řešení), 5, 8 (1. způsob řešení), 11
- eliminační metoda: 1 (1. a 2. způsob řešení), 4 (1. a 2. způsob řešení), 5
- multiplikativní metoda: 17
- metoda dvojmocí: 1 (3. způsob řešení), 2, 2A, 2B, 2C, 3, 8 (1. a 2. způsob řešení)
- metoda faktorizace: 1 (2. způsob řešení), 4 (1. a 2. způsob řešení), 5, 14 (1. způsob řešení)
- metoda nerovností a odhadů: 1 (4. způsob řešení), 6, 7, 8 (3. způsob řešení), 9, 10, 11, 12, 14 (2. způsob řešení)
- grafická metoda (analytická geometrie): 1 (5. způsob řešení), 8 (3. způsob řešení) a 19 (neřešená úloha)
- metoda extrémálního prvku: 6, 7
- metoda goniometrických substitucí: 13 a 28 (neřešená úloha)

Při práci s tímto učebním textem je vhodné nejprve se podrobněji seznámit s jednotlivými speciálními metodami pro řešení soustav algebraických rovnic (a dále také diofantovských rovnic), které jsou prezentovány v této a v následující kapitole. Až poté doporučujeme pustit se samostatně do řešení úloh uvedených ve 4. a v 5. kapitole.

Příklad 1

V oboru reálných čísel řešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$x^2 + 1 = 2y, \quad (1)$$

$$y^2 + 1 = 2x. \quad (2)$$

Uvedeme pět způsobů řešení dané cyklické soustavy dvou nelineárních rovnic, v nichž poukážeme na podstatné odlišnosti při jejich použití. Lze přitom očekávat, že většina méně zkušených řešitelů se nejprve pokusí o řešení této úlohy využitím eliminační metody, která je proto uvedena jako první z možných postupů při jejím řešení.

1. ZPŮSOB ŘEŠENÍ (eliminační metoda).

Ze rovnice (1) vyjádříme $y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$ a dosadíme za y do (2). Po úpravách dostáváme

$$\left(\frac{x^2 + 1}{2}\right)^2 + 1 = 2x,$$
$$x^4 + 2x^2 - 8x + 5 = 0.$$

Dospěli jsme tak k algebraické rovnici 4. stupně, kterou však (v obecném případě) středoškolskými prostředky řešit nedokážeme. Zkusmo ale zjistíme, že jejím kořenem je $x = 1$. Po dělení mnohočlenu na levé straně této rovnice odpovídajícím kořenovým činitelem $x - 1$ pak dostaneme

$$(x^4 + 2x^2 - 8x + 5) : (x - 1) = x^3 + x^2 + 3x - 5.$$

Výslednému polynomu pak odpovídá následující algebraická rovnice 3. stupně

$$x^3 + x^2 + 3x - 5 = 0.$$

Také v tomto případě zkusmo zjistíme, že tato rovnice má rovněž kořen $x = 1$. Opětovným dělením kořenovým činitelem dostaneme již kvadratickou rovnici

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

s diskriminantem $D = -16$. Proto rovnice

$$x^4 + 2x^2 - 8x + 5 = (x - 1)^2(x^2 + 2x + 5) = 0$$

má dvojnásobný reálný kořen 1 a přitom další reálné kořeny nemá. S ohledem na použitý vztah $y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$ je pak $y = 1$.

ZÁVĚR. Daná soustava rovnic má v oboru reálných čísel jediné řešení, kterým je dvojice $(x, y) = (1; 1)$. Použitá metoda nevyužívala žádnou důsledkovou úpravu, zkouška tedy není nutnou součástí řešení.

2. ZPŮSOB ŘEŠENÍ (aditivní metoda, metoda eliminace).

Vynásobením obou stran rovnice (2) číslem -1 a sečtením výsledné rovnice s danou rovnicí (1) dostaneme

$$x^2 - y^2 = 2y - 2x,$$

což po úpravě vede k rovnici ve faktorizovaném (součinném) tvaru

$$(x - y)(x + y + 2) = 0.$$

Přejdeme tak k řešení soustavy rovnic

$$x^2 + 1 = 2y, \quad (3)$$

$$(x - y)(x + y + 2) = 0, \quad (4)$$

která je ekvivalentní s danou soustavou rovnic (1), (2).

S ohledem na faktorizovaný tvar rovnice (4) s pravou stranou rovnou 0 je třeba dále uvážit dva případy

- (i) Nechť $x - y = 0$, tj. $x = y$. Po dosazení za y do rovnice (3) dostáváme $x^2 + 1 = 2x$, tj. $(x - 1)^2 = 0$. Tato rovnice má dvojnásobný (reálný) kořen $x = 1$, a proto jediné reálné řešení dané soustavy je dvojice $(x, y) = (1; 1)$.
- (ii) Nechť $x + y + 2 = 0$, tj. $y = -x - 2$. Pak ale $x^2 + 1 = -2(x + 2)$ a po úpravě dostáváme následující kvadratickou rovnici

$$x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4 = 0,$$

která nemá řešení v oboru reálných čísel.

ZÁVĚR. Jediným řešením dané soustavy rovnic je tudíž dvojice $(x, y) = (1; 1)$ reálných čísel. Při tomto způsobu řešení jsme provedli opět pouze ekvivalentní úpravy, a proto ani zde zkouška není součástí řešení.

3. ZPŮSOB ŘEŠENÍ (aditivní metoda, metoda čtverců).

Sečtením obou rovnic (1) a (2) a po snadných úpravách dostaneme postupně

$$\begin{aligned}(x^2 + 1) + (y^2 + 1) &= 2x + 2y, \\(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) &= 0, \\(x - 1)^2 + (y - 1)^2 &= 0.\end{aligned}$$

Z poslední rovnice plyne, že nutně je $x = 1$, $y = 1$.

Při řešení jsme však tentokrát použili *důsledkovou* úpravu (poslední rovnice není totiž ekvivalentní s danou soustavou rovnic – je pouze jejím důsledkem) a pro množinu řešení $\mathcal{K}$ dané soustavy rovnic a pro množinu řešení $\mathcal{K}'$ poslední rovnice platí inkluze $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}'$. Provedení zkoušky je tedy v tomto případě nutné (je povinnou součástí řešení úlohy). Pomocí ní se snadno přesvědčíme o tom, že dvojice $(x, y) = (1; 1)$ je skutečně řešením dané soustavy rovnic, což koresponduje s již dříve nalezeným výsledkem.

4. ZPŮSOB ŘEŠENÍ (metoda nerovností a odhadů).

Protože výrazy na levých stranách dané soustavy rovnic nabývají výhradně kladných hodnot (větších nebo rovných $\frac{1}{2}$), jsou x a y kladná reálná čísla. K řešení úlohy nyní využijeme známou nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým

průměrem pro libovolnou dvojici nezáporných reálných čísel (tzv. AG nerovnost). Platí

$$2x = y^2 + 1 \geq 2\sqrt{y^2 \cdot 1} = 2|y| = 2y = x^2 + 1 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot 1} = 2|x| = 2x,$$

tj.

$$2x \geq 2y \geq 2x,$$

odkud plyne $x = y$. Dále pokračujeme stejně např. jako ve 2. způsobu řešení. Protože jsme při řešení nepoužili žádnou důsledkovou úpravu, zkouška není nutná.

5. ZPŮSOB ŘEŠENÍ (užitím prostředků analytické geometrie, graficky)

První z rovnic dané soustavy je po úpravě analytickým vyjádřením paraboly ve tvaru $y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$. Její graf je souměrně sdružený podle osy y kartézského souřadnicového systému Oxy . Podobně rovnice (2) je analytickým vyjádřením paraboly $x = \frac{1}{2}(y^2 + 1)$, jejíž graf je souměrně sdružený podle osy x . Obě paraboly jsou navíc souměrně sdružené podle osy I. a III. kvadrantu uvažovaného souřadnicového systému, tedy podle přímky $y = x$. Případný průsečík (průsečíky) obou těchto křivek musí ležet *pouze* na této přímce. Využitím této úvahy již snadno zjistíme, že obě paraboly se vzájemně dotýkají v bodě $P[1; 1]$. Dostáváme tak stejný výsledek jako ve všech předešlých postupech. Bodu P pak odpovídá dvojice reálných čísel (x, y) , jejíž složky jsou totožné se složkami bodu P .

Příklad 2

V oboru reálných čísel řešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$x^2 - 3y + 4 = z, \quad (1)$$

$$y^2 - 3z + 4 = x, \quad (2)$$

$$z^2 - 3x + 4 = y. \quad (3)$$

ŘEŠENÍ. Sečtením všech rovnic (1)–(3), dostaneme po úpravě

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 - 4z + 4) = 0,$$

tj.

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 0.$$

Poslední rovnici vyhovuje jediná trojice reálných čísel, a to $(x, y, z) = (2; 2; 2)$.

ZÁVĚR. Vzhledem k použité důsledkové úpravě platí pro množinu řešení dané úlohy $\mathcal{K}$ a pro množinu řešení poslední rovnice $\mathcal{K}'$ inkluze $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}'$. Je tedy nutné provést zkoušku, pomocí níž zjistíme, že $\mathcal{K} = \mathcal{K}'$. Daná úloha má tedy jediné řešení v oboru reálných čísel, a to $(x, y, z) = (2; 2; 2)$.

Zabývejme se nyní řešením některých číselně pozměněných variant předešlé úlohy, abychom poukázali na přednosti i slabé stránky použité *metody dvojmocí*, neboli *metody čtverců*.

Příklad 2A

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 - 3y + 3 = z, \quad (4)$$

$$y^2 - 3z + 4 = x, \quad (5)$$

$$z^2 - 3x + 5 = y. \quad (6)$$

ŘEŠENÍ. Důsledkovými úpravami opět dojdeme ke stejné rovnici, dostáváme tedy $\mathcal{K}' = \{(2; 2; 2)\}$. Zkouškou se snadno přesvědčíme o tom, že nalezená trojice $(x, y, z) = (2; 2; 2)$ ale dané soustavě nevyhovuje.

Soustava rovnic (4)–(6) tudíž *nemá* řešení v oboru reálných čísel.

Příklad 2B

V oboru reálných čísel řešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$x^2 - 3y + 3 = z, \quad (7)$$

$$y^2 - 3z + 3 = x, \quad (8)$$

$$z^2 - 3x + 3 = y. \quad (9)$$

Sečteme-li opět všechny tři rovnice (7)–(9) této soustavy rovnic, dostaneme po úpravě

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 - 4z + 4) = 3,$$

a tedy

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = (\sqrt{3})^2.$$

Poslední rovnice je (z pohledu analytické geometrie) rovnicí kulové plochy se středem v bodě $S[2; 2; 2]$ a poloměrem $r = \sqrt{3}$. Množina $\mathcal{K}'$ je tedy nekonečná (přesněji nespočetná). Vzhledem k tomu, že $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}'$, je třeba provést zkoušku. Ta je však prakticky *neproveditelná*, a proto *nelze* v takovém případě přesněji specifikovat množinu $\mathcal{K}$ všech řešení dané úlohy.

Vidíme tedy, že *metoda čtverců* nemá univerzální uplatnění a její použití je často omezeno danými číselnými parametry.

Poznámka. Při podrobnějším zkoumání dané cyklické soustavy rovnic, které se opírá o využití speciálních metod numerické matematiky pro řešení soustav nelineárních rovnic, lze však poměrně překvapivě zjistit, že daná soustava rovnic má právě dvě reálná řešení, a to $(x, y, z) = (1; 1; 1)$ a $(x, y, z) = (3; 3; 3)$.¹

¹Příklad 2B lze řešit také jiným způsobem – např. pomocí *metody nerovností a odhadů*.

Příklad 2C

V oboru reálných čísel řešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$x^2 - 3y + 5 = z, \quad (10)$$

$$y^2 - 3z + 5 = x, \quad (11)$$

$$z^2 - 3x + 5 = y. \quad (12)$$

ŘEŠENÍ. Sečtením všech tří rovnic (10)–(12) dostaneme nyní po provedení snadných úprav

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 - 4z + 4) = -3,$$

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = -3.$$

Z poslední rovnice je patrné, že množina jejich řešení $\mathcal{K}'$ je prázdná. Protože $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}'$, nemá ani daná soustava rovnic (10)–(12) řešení v oboru reálných čísel.

Příklad 3

V oboru reálných čísel řešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$2x^2 + 2xy + 1 = 4z, \quad (1)$$

$$2y^2 + 2yz + 1 = 4x, \quad (2)$$

$$2z^2 + 2zx + 1 = 4y. \quad (3)$$

ŘEŠENÍ. Sečtením všech tří rovnic (1)–(3) po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + 1 + 2xy - 2x - 2y) + (y^2 + z^2 + 1 + 2yz - 2y - 2z) + (z^2 + x^2 + 1 + 2zx - 2z - 2x) = \\ = (x + y - 1)^2 + (y + z - 1)^2 + (z + x - 1)^2 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Z rovnice (4) pak plyne

$$x + y = y + z = z + x = 1.$$

Řešením této soustavy tří lineárních rovnic snadno zjistíme, že $x = y = z = \frac{1}{2}$. Zkouškou, která je zde s ohledem na použitou důsledkovou úpravu součástí řešení, již snadno ověříme, že nalezená trojice reálných čísel je také řešením dané soustavy rovnic.

ZÁVĚR. Daná soustava rovnic má právě jedno řešení v oboru reálných čísel, a to $(x, y, z) = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

Příklad 4

V oboru reálných čísel řešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$x^2 + y + z = 2, \quad (1)$$

$$y^2 + z + x = 2, \quad (2)$$

$$z^2 + x + y = 2. \quad (3)$$

1. ZPŮSOB ŘEŠENÍ. Vynásobením obou stran rovnice (2) číslem -1 a jejím sečtením s rovnicí (1) dostaneme

$$x^2 - y^2 - (x - y) = 0,$$

tj.

$$(x - y)(x + y - 1) = 0.$$

Podobně z rovnic (1) a (3) plyne

$$x^2 - z^2 - (x - z) = 0,$$

tj.

$$(x - z)(x + z - 1) = 0.$$

Daná soustava rovnic (1)–(3) je tak ekvivalentní se soustavou rovnic

$$x^2 + y + z = 2, \quad (4)$$

$$(x - y)(x + y - 1) = 0, \quad (5)$$

$$(x - z)(x + z - 1) = 0. \quad (6)$$

Nyní vyjdeme z rovnic (5) a (6), kde rozlišíme jednotlivé možné případy

- (i) $(y = x) \wedge (z = x)$. Po dosazení za y a za z do rovnice (4) dostáváme $x^2 + 2x - 2 = 0$, odkud $x_1 = -1 + \sqrt{3}$ a $x_2 = -1 - \sqrt{3}$. Řešením jsou v tomto případě tedy trojice reálných čísel $(x_1, y_1, z_1) = (-1 + \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3})$ a $(x_2, y_2, z_2) = (-1 - \sqrt{3}; -1 - \sqrt{3}; -1 - \sqrt{3})$.
- (ii) $(y = x) \wedge (z = 1 - x)$. Po dosazení za y a za z do rovnice (4) zde dostáváme $x^2 - 1 = 0$. Odtud máme $x_3 = -1$ a $x_4 = 1$. Řešením jsou tedy trojice $(x_3, y_3, z_3) = (-1; -1; 2)$ a $(x_4, y_4, z_4) = (1; 1; 0)$.
- (iii) $(y = 1 - x) \wedge (z = x)$. Po dosazení za y a za z do rovnice (4) dostáváme opět kvadratickou rovnici $x^2 - 1 = 0$, odkud $x_5 = -1$ a $x_6 = 1$. Řešením jsou zde tedy trojice $(x_5, y_5, z_5) = (-1; 2; -1)$ a $(x_6, y_6, z_6) = (1; 0; 1)$.
- (iv) $(y = 1 - x) \wedge (z = 1 - x)$. Po dosazení za y a za z do rovnice (4) dostáváme nyní $x^2 - 2x = 0$, odkud $x_7 = 2$ a $x_8 = 0$. V tomto případě jsou řešením trojice reálných čísel $(x_7, y_7, z_7) = (2; -1; -1)$ a $(x_8, y_8, z_8) = (0; 1; 1)$.

ZÁVĚR. Celkově jsme tak našli 8 řešení dané úlohy, viz případy (i)–(iv). Vzhledem k tomu, že uvedené řešení úlohy se opíralo výhradně o ekvivaletní úpravy, zkouška není povinnou součástí řešení.

2. ZPŮSOB ŘEŠENÍ. Z rovnice (1) vyjádříme $z = 2 - x^2 - y$ a dosadíme v rovnicích (2) a (3) tuto hodnotu za neznámou z . Dostaneme tak následující soustavu dvou rovnic s neznámými x, y

$$\begin{aligned}y^2 + (2 - x^2 - y) + x &= 2, \\(2 - x^2 - y)^2 + x + y &= 2.\end{aligned}$$

Po snadné úpravě obdržíme soustavu rovnic

$$(y - x)(y + x - 1) = 0, \quad (7)$$

$$x^4 + 2x^2y - 4x^2 + x + y^2 - 3y + 2 = 0. \quad (8)$$

S ohledem na faktorizovaný tvar rovnice (7) rozlišíme dále dva případy.

(i) Necht' $y = x$. Po dosazení za y do rovnice (8) pak dostáváme

$$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x + 2 = 0,$$

tj.

$$(x^2 + 2x - 2)(x + 1)(x - 1) = 0,$$

odkud $x_1 = -1 + \sqrt{3}$, $x_2 = -1 - \sqrt{3}$, $x_3 = -1$ a $x_4 = 1$. Kořenům poslední algebraické rovnice 4. stupně pak odpovídají složky řešení $y_1 = -1 + \sqrt{3}$, $y_2 = -1 - \sqrt{3}$, $y_3 = -1$ a $y_4 = 1$ a využitím vztahu $z = 2 - x^2 - y$ dostaneme rovněž $z_1 = -1 - \sqrt{3}$, $z_2 = -1 + \sqrt{3}$, $z_3 = 2$ a $z_4 = 0$.

(ii) Necht' $y = 1 - x$. Po dosazení za y do rovnice (8) nyní máme

$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 0,$$

tj.

$$(x + 1)(x - 1)(x - 2)x = 0,$$

odkud $x_5 = -1$, $x_6 = 1$, $x_7 = 2$ a $x_8 = 0$. Kořenům poslední rovnice pak odpovídají složky $y_5 = 2$, $y_6 = 0$, $y_7 = -1$, $y_8 = 1$ a dále $z_5 = -1$, $z_6 = 1$, $z_7 = -1$, $z_8 = 1$.

Uvedeným postupem jsme tak našli stejná řešení dané úlohy jako v prvním způsobu řešení. S ohledem na použité ekvivaletní úpravy není ani zde zkouška povinnou součástí řešení úlohy.

Příklad 5

V oboru reálných čísel řešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$x^2 + y^2 + z = 2, \quad (1)$$

$$y^2 + z^2 + x = 2, \quad (2)$$

$$z^2 + x^2 + y = 2. \quad (3)$$

ŘEŠENÍ. Stejně jako v předešlém příkladu dostaneme odečtením rovnice (2) od rovnice (1)

$$x^2 - z^2 - (x - z) = 0$$

a dále po úpravě pak rovnici

$$(x - z)(x + z - 1) = 0.$$

Odečtením rovnice (3) od rovnice (2) dostaneme podobně

$$(x - y)(x + y - 1) = 0.$$

Uvažujme nyní soustavu rovnic

$$x^2 + y^2 + z = 2, \quad (4)$$

$$(x - y)(x + y - 1) = 0, \quad (5)$$

$$(x - z)(x + z - 1) = 0, \quad (6)$$

která je ekvivalentní s danou soustavou rovnic (1)–(3). Opět využijeme faktori-zovaného tvaru pravých stran rovnic (5) a (6) s nulovými pravými stranami, kde rozlišíme následující čtyři případy:

- (i) Necht' $(y = x) \wedge (z = x)$. Po dosazení za y a z z obou těchto vztahů do rovnice (4) dostaneme následující kvadratickou rovnici s neznámou x

$$2x^2 + x - 2 = 0,$$

jejímiž reálnými kořeny jsou čísla $x_1 = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{17})$ a $x_2 = \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{17})$. Těm pak odpovídají následující dvě řešení dané soustavy rovnic

$$(x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{4}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \right),$$

$$(x_2, y_2, z_2) = \left(\frac{-1 - \sqrt{17}}{4}; \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}; \frac{-1 - \sqrt{17}}{4} \right).$$

- (ii) Necht' $(y = x) \wedge (z = 1 - x)$. Podobně i zde dostaneme po dosazení za y a za z v rovnici (4) kvadratickou rovnici

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

s kořeny $x_3 = -\frac{1}{2}$ a $x_4 = 1$. Těmto kořenům pak odpovídají následující dvě řešení dané soustavy rovnic

$$(x_3, y_3, z_3) = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \quad \text{a} \quad (x_4, y_4, z_4) = (1; 1; 0).$$

- (iii) Necht' $(y = 1 - x) \wedge (z = x)$. Podobně jako v předchozích dvou případech dostaneme po dosazením za y a z v rovnici (4) stejnou kvadratickou rovnici jako v případě (ii)

$$2x^2 - x - 1 = 0.$$

Kořenům $x_5 = -\frac{1}{2}$, $x_6 = 1$ této kvadratické rovnice odpovídají v tomto případě další dvě řešení dané soustavy rovnic, a to

$$(x_5, y_5, z_5) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right) \quad \text{a} \quad (x_6, y_6, z_6) = (1; 0; 1).$$

- (iv) Konečně necht' $(y = 1 - x) \wedge (z = 1 - x)$. Analogicky pak přejdeme k řešení kvadratické rovnice

$$2x^2 - 3x = 0,$$

jejímiž kořeny jsou reálná čísla $x_7 = \frac{3}{2}$ a $x_8 = 0$. Jim pak odpovídají poslední dvě řešení dané soustavy rovnic

$$(x_7, y_7, z_7) = \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) \quad \text{a} \quad (x_8, y_8, z_8) = (0; 1; 1).$$

ZÁVĚR. Daná soustava rovnic má celkem 8 reálných řešení, která jsou uvedena v případech (i)–(iv). Zkouška není v tomto případě součástí řešení, neboť jsme při řešení úlohy nepoužili žádnou důsledkovou úpravu.

Příklad 6

V oboru nezáporných reálných čísel řešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$a + b = c^2,$$

$$b + c = d^2,$$

$$c + d = e^2,$$

$$d + e = a^2,$$

$$e + a = b^2.$$

ŘEŠENÍ. Předně si uvědomme, že pokud některá ze složek řešení dané soustavy rovnic je rovna 0, jsou i ostatní čtyři složky rovny 0. Nalezli jsme tak triviální řešení $(a, b, c, d, e) = (0; 0; 0; 0; 0)$ dané soustavy rovnic.

Dále předpokládejme, že $abcde \neq 0$ a hledejme všechna řešení dané úlohy, jejichž složkami jsou kladná reálná čísla. K řešení použijeme tzv. *metodu extrémního prvku*. Označme $K = \max\{a, b, c, d, e\}$ a $L = \min\{a, b, c, d, e\}$. Pak existuje $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ takové, že $x_i + x_{i+1} = K^2$, kde $x_6 = x_1$. Platí tudíž

$$2K = K + K \geq x_i + x_{i+1} = K^2, \quad \text{tj.} \quad 2K - K^2 = K(2 - K) \geq 0.$$

Protože $K > 0$, je současně $K \leq 2$.

Současně ale existuje $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tak, že $x_j + x_{j+1} = L^2$, kde $x_6 = x_1$. Platí tedy

$$2L = L + L \leq x_j + x_{j+1} = L^2, \quad \text{tj.} \quad 2L - L^2 = L(2 - L) \leq 0.$$

Vzhledem k tomu, že také $L > 0$, je $L \geq 2$.

Celkově tak máme

$$2 \leq L = \min\{a, b, c, d, e\} \leq \max\{a, b, c, d, e\} = K \leq 2, \quad \text{tj.} \quad 2 \leq L \leq K \leq 2.$$

Odtud plyne $K = L$, a tedy $(a, b, c, d, e) = (2; 2; 2; 2; 2)$.

ZÁVĚR. Dána soustava rovnic má dvě řešení v oboru nezáporných reálných čísel; $(a, b, c, d, e) \in \{(0; 0; 0; 0; 0), (2; 2; 2; 2; 2)\}$.

Příklad 7

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$(x + y)^3 = z, \tag{1}$$

$$(y + z)^3 = x, \tag{2}$$

$$(z + x)^3 = y. \tag{3}$$

ŘEŠENÍ. Při řešení dané soustavy rovnic opět využijeme *metodu extrémního prvku* (v tomto případě *maximálního prvku*).

Snadno nejprve zjistíme, že daná soustava rovnic má řešení $(x, y, z) = (0; 0; 0)$. Je-li totiž např. $x = 0$, pak z rovnice (2) plyne $z = -y$ a po dosazení do (3) máme $-y^3 = y$, tj. $y + y^3 = y(y^2 + 1) = 0$, odkud $y = 0$, a tedy i $z = 0$.

Dále nechť $xyz \neq 0$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že např. x je největší ze složek řešení dané soustavy rovnic, tj. že platí $x \geq y$ a současně $x \geq z$. Z předpokladu $x \geq y$ a dále využitím rovnic (2) a (3) dané soustavy plyne

$$(y + z)^3 \geq (z + x)^3 \quad \text{a odtud po úpravě} \quad y \geq x.$$

Je tedy $x = y$.

Podobně na základě předpokladu $x \geq z$ a využitím rovnic (1) a (2) dané soustavy dostaneme

$$(y + z)^3 \geq (x + y)^3, \quad \text{tedy} \quad z \geq x.$$

Odtud plyne $z = x$.

Celkově tedy máme $x = y = z$. Dosazením za y a z z posledního vztahu do rovnice (1) dostaneme kubickou rovnici (algebraickou rovnici 3. stupně s reálnými koeficienty)

$$(2x)^3 = x, \quad \text{a po úpravě pak rovnici} \quad x(8x^2 - 1) = 0,$$

která má tři reálné kořeny: 0 , $\frac{1}{4}\sqrt{2}$ a $-\frac{1}{4}\sqrt{2}$. S ohledem na podmínku $xyz \neq 0$ tak dostáváme další dvě nenulová řešení dané soustavy rovnic.

ZÁVĚR. Daná soustava rovnic má tři reálná řešení (x, y, z) , a to $(0; 0; 0)$, $(\frac{1}{4}\sqrt{2}; \frac{1}{4}\sqrt{2}; \frac{1}{4}\sqrt{2})$ a $(-\frac{1}{4}\sqrt{2}; -\frac{1}{4}\sqrt{2}; -\frac{1}{4}\sqrt{2})$. Provedení zde není (s ohledem na použitý postup) součástí řešení.

Následující soustava je pro středoškoláky nezvyklá především tím, že počet rovnic (podmínek) je menší než počet neznámých. K řešení nestandardních úloh tohoto typu lze mnohdy s výhodou využít speciální metody a postupy.

Příklad 8

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$z + y + z = 3, \tag{1}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3. \tag{2}$$

1. ZPŮSOB ŘEŠENÍ. Vynásobením obou stran rovnice (1) číslem -2 a jejím sečtením s rovnicí (2) dostaneme po snadné úpravě rovnici

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 0,$$

která má jediné řešení v oboru reálných čísel $(x, y, z) = (1; 1; 1)$. Vzhledem k provedené důsledkové úpravě je při tomto způsobu řešení nutno provést zkoušku. Pomocí ní ověříme, že nalezená trojice $(1; 1; 1)$ je vskutku řešením dané soustavy rovnic.

ZÁVĚR. Daná soustava rovnic má právě jedno řešení v oboru reálných čísel, kterým je trojice $(x, y, z) = (1; 1; 1)$.

2. ZPŮSOB ŘEŠENÍ. Z rovnice (1) vyjádříme $z = 3 - x - y$ a za z dosadíme do rovnice (2). Dostaneme tak

$$x^2 + y^2 + (3 - x - y)^2 = 3.$$

Po provedení naznačených úprav postupně obdržíme

$$2x^2 + 2y^2 - 6x - 6y + 2xy + 6 = 0,$$

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x + y - 2)^2 = 0.$$

Odtud plyne $x = 1$, $y = 1$ a vzhledem k použitému vyjádření $z = 3 - x - y$ je $z = 1$. Nalezená trojice $(x, y, z) = (1; 1; 1)$ je řešením dané úlohy. Zkoušku zde není nutno provádět, neboť v tomto postupu nebyla použita žádná důsledková úprava.

3. ZPŮSOB ŘEŠENÍ. V následujícím řešení bude prezentována metoda využívající prostředky analytické geometrie. Rovnice (1) v zadání je pak obecnou rovnicí roviny. Rovnice (2) je rovnicí kulové plochy se středem v počátku kartézského souřadnicového systému Oxy a poloměrem $\sqrt{3}$. Stačí jen ověřit, že rovina daná rovnicí (1) je tečnou rovinou ke kulové ploše dané rovnicí (2) a jejím dotykovým bodem je bod o souřadnicích $[1; 1; 1]$.

4. ZPŮSOB ŘEŠENÍ využívá známou Cauchy–Schwarzovu nerovnost, viz např. [20], a to pro trojice (x, y, z) , $(1, 1, 1)$ reálných čísel. Pro uvedené dvě trojice reálných čísel platí podle Cauchy–Schwarzovy nerovnosti

$$\underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{=3} \underbrace{(1^2 + 1^2 + 1^2)}_{=3} \geq \underbrace{(x \cdot 1 + y \cdot 1 + z \cdot 1)^2}_{=9}.$$

V našem případě nerovnost přechází v rovnost, platí tudíž $x = y = z = \lambda$. Odtud pak máme $x + y + z = 3\lambda = 3$, a tudíž $\lambda = 1$. Soustava má tedy jediné reálné řešení $(x, y, z) = (1; 1; 1)$. Zkouška zde není nutná.

Při řešení úloh (6)–(8) a rovněž při řešení následujících čtyř úloh (9)–(12) využíváme (kromě jiných metod) podstatným způsobem tzv. *metodu nerovností a odhadů*.

Příklad 9

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$2x^2 + (y + z)^2 = 4 - t^2, \tag{1}$$

$$x^4 + 3(y + 1)^2 = t - 2. \tag{2}$$

ŘEŠENÍ. Levé strany obou daných rovnic nabývají evidentně nezáporných hodnot, proto stačí najít všechna $t \in \mathbb{R}$, pro něž platí

$$(4 - t^2 \geq 0) \wedge (t - 2 \geq 0),$$

tj.

$$(-2 \leq t \leq 2) \wedge (t \geq 2).$$

Odtud bezprostředně plyne $t = 2$. Dále pak již snadno získáme $x = 0$, $y = -1$ a $z = 1$. Vzhledem k tomu, že současné splnění obou nerovností je podmínkou nutnou (nikoliv postačující), je nutno přesvědčit se zkouškou o správnosti nalezeného řešení.

ZÁVĚR. Jediným řešením dané soustavy je čtveřice $(x, y, z, t) = (0; -1; 1; 2)$ reálných čísel.

Příklad 10

V oboru kladných reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + y + z = 6, \tag{1}$$

$$xyz = 8. \tag{2}$$

ŘEŠENÍ. Užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (AG nerovnosti) pro trojici nezáporných reálných čísel x, y, z platí

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}.$$

Rovnost v ní nastane, právě když $x = y = z$. Podle zadání úlohy však pro hledané trojice kladných reálných čísel x, y, z platí

$$2 = \frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} = 2, \tag{3}$$

V nerovnici (3) však nastane rovnost, a proto s ohledem na rovnici (1) je nutně $x = y = z = 2$.

ZÁVĚR. Zkouškou, která je zde součástí řešení, se snadno přesvědčíme, že jediným řešením dané soustavy rovnic je trojice $(x, y, z) = (2; 2; 2)$.

Příklad 11 (61. ročník MO, 2011/2012, A–III–3)

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^4 + y^2 + 4 = 5yz, \tag{1}$$

$$y^4 + z^2 + 4 = 5zx, \tag{2}$$

$$z^4 + x^2 + 4 = 5xy. \tag{3}$$

ŘEŠENÍ. Nejprve odhadneme levou stranu první rovnice dané soustavy pomocí nerovnosti $4x^2 \leq x^4 + 4$, která je splněna pro libovolné reálné číslo x . Rovnost v ní nastane, právě když $x^2 = 2$, tj. právě když $x = \sqrt{2}$ nebo $x = -\sqrt{2}$.

Dostaneme tak

$$4x^2 + y^2 \leq x^4 + y^2 + 4 = 5yz.$$

Analogicky odhadneme také levé strany zbylých dvou rovnic této soustavy. Obdržíme tak následující trojici nerovnic

$$4x^2 + y^2 \leq 5yz, \quad (4)$$

$$4y^2 + z^2 \leq 5zx, \quad (5)$$

$$4z^2 + x^2 \leq 5xy. \quad (6)$$

Jejich součtem dostaneme dále po snadné úpravě nerovnici

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq xy + yz + zx. \quad (7)$$

Po úpravě této nerovnice dostaneme

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \leq 0. \quad (8)$$

Odtud plyne, že v obou nerovnicích (7) a (8) nutně nastane rovnost, tj. platí $x = y = z$. Rovnost musí ale platit také v každé z nerovnic (4)–(6). Odtud již bezprostředně vyplývá

$$x = y = z = \sqrt{2} \quad \text{nebo} \quad x = y = z = -\sqrt{2}.$$

Zkouškou (zde je opět součástí řešení úlohy) se snadno přesvědčíme, že obě nalezená řešení dané soustavy rovnic vyhovují.

ZÁVĚR. Daná soustava rovnic má v oboru reálných čísel právě dvě řešení, kterými jsou trojice $(x, y, z) \in \{(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2}), (-\sqrt{2}; -\sqrt{2}; -\sqrt{2})\}$.

Příklad 12 (7. USAMO, 1978)

Nechť a, b, c, d, e jsou reálná čísla které vyhovují rovnicím

$$a + b + c + d + e = 8, \quad (1)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16. \quad (2)$$

Určete, jaké největší hodnoty může nabývat e .

ŘEŠENÍ. Užitím Cauchy-Schwarzovy nerovnosti pro čtveřice $(1, 1, 1, 1), (a, b, c, d)$ reálných čísel dostáváme

$$(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq (a + b + c + d)^2.$$

Z předešlé nerovnice a z podmínek úlohy pak plyne

$$4(16 - e^2) \geq (8 - e)^2, \quad \text{tj.} \quad e(5e - 16) \leq 0.$$

Řešením této nerovnice jsou všechna reálná čísla e , pro něž platí $0 \leq e \leq \frac{16}{5}$. Největší možná hodnota e za daných podmínek je tedy $\frac{16}{5}$. V použité nerovnosti pak ovšem nastává rovnost, a proto nutně $a = b = c = d$. Z rovnice (1) odtud plyne $a = b = c = d = \frac{6}{5}$.

ZÁVĚR. Největší možná hodnota e za daných podmínek je tedy $\frac{16}{5}$. Jí pak odpovídá pětice $(a, b, c, d, e) = (\frac{6}{5}; \frac{6}{5}; \frac{6}{5}; \frac{6}{5}; \frac{16}{5})$ reálných čísel, která vyhovují podmínkám úlohy.

Příklad 13

V oboru reálných čísel řešte následující cyklickou soustavu rovnic

$$x_1 - \frac{1}{x_1} = 2x_2, \tag{1}$$

$$x_2 - \frac{1}{x_2} = 2x_3, \tag{2}$$

$$x_3 - \frac{1}{x_3} = 2x_4, \tag{3}$$

$$x_4 - \frac{1}{x_4} = 2x_1. \tag{4}$$

ŘEŠENÍ. Využijeme goniometrickou identitu

$$2 \cotg 2\alpha = \cotg \alpha - \frac{1}{\cotg \alpha},$$

která platí pro všechna $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Ze zadání úlohy je patrné, že všechna x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) jsou různá od nuly. Položme nyní $x_1 = \cotg \alpha$, tj. využíváme zde tzv. *goniometrickou substituci*, kde $\alpha \in (0; \frac{1}{2}\pi) \cup (\frac{1}{2}\pi; \pi)$. Z rovnice (1) pak plyne $x_2 = \cotg 2\alpha$. Analogicky z (2) máme $x_3 = \cotg 4\alpha$, ze třetí rovnice pak $x_4 = \cotg 8\alpha$ a konečně z poslední rovnice obdržíme $x_1 = \cotg 16\alpha$. Platí tudíž $x_1 = \cotg \alpha = \cotg 16\alpha$, tj. $16\alpha - \alpha = k\pi$, kde k je vhodné celé číslo, a tedy $\alpha = \frac{1}{15}k\pi$, kde $k = 1, 2, \dots, 14$.

ZÁVĚR. Řešením dané soustavy jsou tudíž všechny čtveřice (x_1, x_2, x_3, x_4) reálných čísel, pro něž platí

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\cotg \frac{k\pi}{15}; \cotg \frac{2k\pi}{15}; \cotg \frac{4k\pi}{15}; \cotg \frac{8k\pi}{15} \right),$$

kde $k = 1, 2, \dots, 14$. Zkouška zde není nutná.

Poznámka. Všimněme si, že složky všech řešení dané soustavy tvoří po dvou navzájem různá reálná čísla a neexistuje přitom její řešení o stejných složkách, což je při řešení cyklických soustav rovnic zřídka vídaný jev.

3. Metody řešení diofantovských rovnic

V této části se seznámíme se speciálními metodami řešení tzv. *diofantovských rovnic* algebraického typu, tj. algebraických rovnic (popř. jejich soustav) s více neznámými, které řešíme zpravidla v oboru celých čísel ($\mathbb{Z}$) nebo v některé její významné podmnožině ($\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$ apod.). Patří mezi ně kromě všech metod pro řešení soustav algebraických rovnic uvedených ve 2. kapitole dále následující speciální metody:

- metoda diskriminantu: 14 (1. způsob řešení), 48 (neřešená úloha)
- metoda nekonečného klesání: 15, 45 (neřešená úloha)
- metoda dělitelnosti a číselných kongruencí: 16, 17 (poznámka) a dále 44 (neřešená úloha)
- multiplikativní metoda: 17

Příklad 14

V oboru celých čísel řešte (diofantovskou) rovnici o neznámých x, y

$$x^2 + x + 1 = y^2. \quad (1)$$

1. ZPŮSOB ŘEŠENÍ. Danou diofantovskou rovnici (1) budeme řešit jako kvadratickou rovnici s neznámou x (a celočíselným parametrem y), tj.

$$x^2 + x + (1 - y^2) = 0. \quad (2)$$

Pro diskriminant D této kvadratické rovnice platí $D = 4y^2 - 3$. Pro libovolné celé číslo y ($y \neq 0$), je $D > 0$. K tomu, aby kvadratická rovnice (2) měla celočíselný kořen je nutné, aby hodnota jeho diskriminantu byla druhou mocninou některého přirozeného čísla, tj. nutně platí $4y^2 - 3 = m^2$, kde m je přirozené číslo. Po úpravě posledního vztahu tak dostaneme rovnici

$$4y^2 - m^2 = (2y - m)(2y + m) = 3. \quad (3)$$

Vzhledem k tomu, že m je přirozené číslo, je $2y - m < 2y + m$. Protože pravá strana rovnice (3) je prvočíselnou hodnotou, máme pouze dvě možnosti ke stanovení celočíselných hodnot závorek na levé straně poslední rovnice, kdy

$$(2y - m)(2y + m) = 3 = 1 \cdot 3 = (-3) \cdot (-1).$$

Uvažujme tak následující dvě soustavy lineárních rovnic o neznámých y a m . První z nich

$$\begin{aligned} 2y - m &= 1, \\ 2y + m &= 3 \end{aligned}$$

má řešení $y = 1$ a $m = 1$. Hodnota uvažovaného diskriminantu pro $y = 1$ je $D = 1$. Odpovídající hodnoty neznámé v zadané diofantovské rovnici pro nalezenou hodnotu y získáme po dosazení za $y = 1$ do rovnice (1). Dostaneme tak kvadratickou rovnici $x^2 + x = 0$, jejímiž kořeny jsou 0 a -1 .

Řešením druhé soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 2y - m &= -3, \\ 2y + m &= -1 \end{aligned}$$

dostáváme $y = -1$ a $m = 1$. Po dosazení za y v (1) obdržíme tutéž kvadratickou rovnici jako v předešlém případě, tj. $x^2 + x = 0$.

ZÁVĚR. Daná diofantovská rovnice má tedy čtyři celočíselná řešení, kterými jsou dvojice $(x; y) \in \{(0; 1), (-1; 1), (0; -1), (-1; -1)\}$. Zkouška zde není nutná.

Poznámka. Při řešení dané úlohy lze postupovat poněkud „přímočařeji“. Danou rovnici lze totiž po úpravě faktorizovat následujícím způsobem:

$$(2x - 2y + 1)(2x + 2y + 1) = -3,$$

odkud již obdobným způsobem získáme všechna řešení dané rovnice.

2. ZPŮSOB ŘEŠENÍ. Pokud existuje určité celočíselné řešení (x, y) , pak $(x, -y)$ je rovněž řešením dané rovnice. Můžeme se tudíž omezit na nalezení všech řešení dané rovnice s nezápornou celočíselnou složkou y . Rozlišíme přitom následující čtyři případy:

(i) Necht' $x \in \mathbb{N}$. Pak platí

$$x^2 < x^2 + x + 1 = y^2 < x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2. \quad (4)$$

Vzhledem k tomu, že x a $x+1$ jsou po sobě jdoucí přirozená čísla, neexistuje žádné celé nezáporné číslo y , které by splňovalo nerovnosti (4).

(ii) Necht' $x = 0$, pak $y = 1$ nebo $y = -1$.

(iii) Necht' $x = -1$, je opět $y = 1$ nebo $y = -1$.

(iv) Nechť konečně $x \in \mathbb{Z}$ a současně $x \leq -2$. Pak platí

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 < x^2 + \underbrace{x+1}_{\leq -1} = y^2 < x^2$$

Protože mezi druhými mocninami dvou po sobě jdoucích celých čísel neleží na číselné ose žádná další druhá mocnina některého celého čísla, neexistují celá čísla x, y ($x \leq -2, y \geq 0$), která by současně splňovala nerovnosti

$$(x+1)^2 < y^2 < x^2.$$

Poznámka. K témuž závěru dojdeme také za použití substituce $z = -x$, která převádí zkoumaný případ (iv) na případ (i). Detailní ověření ponecháváme čtenáři.

Dospěli jsme tak ke stejnému závěru jako v případě prvního způsobu řešení této úlohy.

Při řešení následující úlohy je prezentována tzv. *Fermatova metoda nekonečného klesání* (Fermat's infinite descent method). S jejím podrobným popisem založeným na zřejmé skutečnosti že *neexistuje* nekonečná klesající posloupnost nezáporných celých čísel se můžete podrobněji seznámit např. v [1] nebo v [3].

Příklad 15

V oboru celých nezáporných čísel řešte rovnici

$$x^3 + 2y^3 = 4z^3. \quad (1)$$

ŘEŠENÍ. Snadno se vidí že trojice $(x, y, z) = (0; 0; 0)$ je řešením dané diofantovské rovnice. Užitím (Fermatovy) metody nekonečného klesání, viz např. [1] ukážeme, že tato rovnice nemá jiná řešení v oboru celých nezáporných čísel.

(i) Pokud $z = 0$, je rovněž $x = y = 0$.

(ii) Je-li $x = 0$, dostáváme po úpravě diofantovskou rovnici

$$y^3 = 2z^3. \quad (2)$$

Ukážeme, že jediným řešením rovnice (2) v oboru celých nezáporných čísel je dvojice $(y, z) = (0; 0)$. K tomu využijeme tzv. *metodu nekonečného klesání*. Předpokládejme, že existuje uspořádaná dvojice (y, z) přirozených čísel vyhovující rovnici (2), pak ale y je sudé číslo, tj. $y = 2y_1$, přičemž $y_1 < y$. Dosazením za y do (2) pak máme

$$8y_1^3 = 2y^3, \quad \text{tj.} \quad 4y_1^3 = z^3.$$

Odtud plyne, že i z je sudé číslo, tj. $z = 2z_1$ ($z_1 < z$). Dosazením za $y = 2y_1$ a $z = 2z_1$ v rovnici (2) dostaneme po snadné úpravě rovnici

$$y_1^3 = 2z_1^3. \quad (3)$$

Vzhledem k tomu, že neexistují nekonečné klesající posloupnosti (y_i) a (z_i) přirozených čísel, dostáváme se do sporu s předpokladem existence dvojice (y, z) přirozených vyhovujících rovnici (2). Nutně tak platí $y = z = 0$.

(iii) Analogicky (metodou nekonečného klesání) lze rovněž ukázat, že pokud $y = 0$, je také $x = z = 0$.

Předpokládejme konečně, že existuje trojice (x, y, z) přirozených čísel, která splňuje rovnici (1). Pak ale x je sudé číslo, tj. $x = 2x_1$ ($x_1 < x$). Dosazením do rovnice (1) dostaneme po úpravě

$$4x_1^3 + y^3 = 2z^3. \quad (4)$$

Odtud plyne, že také y je sudé číslo, tj. $y = 2y_1$, kde $y_1 < y$. Opětovným dosazením za y do rovnice (4) dostaneme po úpravě rovnici

$$2x_1^3 + 4y_1^3 = z^3. \quad (5)$$

Odtud podobně máme $z = 2z_1$ ($z_1 < z$). Dosazením za x, y i z do rovnice (1) vidíme po její úpravě, že také trojice přirozených čísel (x_1, y_1, z_1) je řešením (1) a celou úvahu bychom mohli zopakovat.

Předpokládejme, že existuje „netriviální“ řešení dané rovnice, tj. řešení, v němž je aspoň jedna složka přirozené číslo a přitom nejmenší možná. Protože však neexistují nekonečné klesající posloupnosti (x_i) , (y_i) , (z_i) přirozených čísel, neexistuje řešení s odpovídající nejmenší možnou složkou, která je přirozeným číslem. Proto neexistuje žádné netriviální řešení (x, y, z) rovnice (1) v oboru přirozených čísel.

ZÁVĚR. Jediným řešením dané rovnice (1) v oboru celých nezáporných čísel je tedy trojice $(x, y, z) = (0; 0; 0)$.

Příklad 16 (Shortlist 11. MMO, 1969)

V oboru celých nezáporných čísel řešte rovnici

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1969^2.$$

ŘEŠENÍ. Použijeme zde *metodu dělitelnosti*. Číslo 1969^2 dává při dělení devíti zbytek 4. Zkoumejme tedy nejprve, jaké zbytky dává při dělení devíti číslo x^3 (tzv. kubické zbytky). Rozlišíme následující tři případy:

- Je-li $x = 3k$ ($k \in \mathbb{N}_0$), je $x^3 = 27k^3 = 9 \cdot 3k^3$, a jeho kubický zbytek je tedy 0.
- Je-li $x = 3k + 1$ ($k \in \mathbb{N}_0$), je $x^3 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1$, proto jeho kubický zbytek je 1.
- Je-li $x = 3k - 1$ ($k \in \mathbb{N}$), je $x^3 = 27k^3 - 27k^2 + 9k - 1$, a jeho kubický zbytek je 8.

Ke stejnému výsledku dospějeme při vyšetřování kubických zbytků u druhého a třetího sčítance na levé straně dané rovnice. Označíme-li nyní uvažované kubické zbytky sčítanců x^3, y^3, z^3 po řadě r_x, r_y, r_z , snadno nahlédneme, že součet

$$r_x + r_y + r_z$$

nemůže pro žádnou trojici možných kubických zbytků z množiny $\{0, 1, 8\}$ nabývat hodnoty 4.

ZÁVĚR. Daná diofantovská rovnice nemá řešení v oboru celých nezáporných čísel.

Příklad 17 (44. ročník MO, 1994/1995, C–S–1)

V oboru nezáporných celých čísel řešte soustavu rovnic

$$a + bc = 3c, \tag{1}$$

$$b + ca = 3a, \tag{2}$$

$$c + ab = 3b. \tag{3}$$

ŘEŠENÍ. Nejprve se uvědomme, že pokud by některá ze složek řešení (a, b, c) je rovna 0, jsou rovny 0 i zbylé dvě složky. Tím jsme našli řešení $(a, b, c) = (0; 0; 0)$.

Předpokládejme tedy dále, že $a, b, c > 0$. Danou soustavu rovnic (1)–(3) upravíme na tvar

$$a = c(3 - b), \tag{4}$$

$$b = a(3 - c), \tag{5}$$

$$c = b(3 - a). \tag{6}$$

Vynásobením rovnic (4)–(6), tj. užitím *multiplikativní metody* dostaneme s ohledem na podmínku $abc \neq 0$ po úpravě jedinou rovnici

$$(3 - a)(3 - b)(3 - c) = 1. \tag{7}$$

Každý z činitelů na levé straně (7) může však nabývat pouze celočíselné hodnoty, tj. 1 nebo -1 . Probráním všech čtyř možných případů najdeme další řešení v oboru přirozených čísel, a to $(a, b, c) = (2; 2; 2)$.

Poznámka. Jiný možný postup využívá *dělitelnosti* v oboru celých čísel. Z rovnic (4)–(6) totiž plyne $(c \mid a) \wedge (a \mid b) \wedge (b \mid c)$, odkud přímo plyne $a = b = c$.

ZÁVĚR. Daná soustava rovnic má dvě řešení v oboru celých nezáporných čísel, a to $(a, b, c) = (0; 0; 0)$ a $(a, b, c) = (2; 2; 2)$. S ohledem na použitý postup zkouška není nutná.

3. Neřešené soustavy algebraických rovnic

Příklad 18 (25. ročník MO, 1975/1976, B–II–3b)

V oboru kladných reálných čísel řešte cyklickou soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x_1 + \frac{1}{x_2} &= 2, \\x_2 + \frac{1}{x_3} &= 2, \\x_3 + \frac{1}{x_1} &= 2.\end{aligned}$$

[Řešení: $(x_1, x_2, x_3) = (1; 1; 1)$.]

Příklad 19

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 28, \\x^2 + y^2 + z^2 &= 56.\end{aligned}$$

[Řešení: $(x, y, z) = (2; 4; 6)$.]

Příklad 20

V oboru kladných reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}a + b + c + d &= 12, \\abcd &= 27 + ab + ac + ad + bc + bd + cd.\end{aligned}$$

[Řešení: $(a, b, c, d) = (3; 3; 3; 3)$.]

Příklad 21 (Švédská MO, 1989)

V oboru kladných reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x + y^2 + z^3 &= 3, & (1) \\y + z^2 + x^3 &= 3, & (2) \\z + x^2 + y^3 &= 3. & (3)\end{aligned}$$

[Řešení: $(x, y, z) = (1; 1; 1)$.]

Příklad 22 (31. ročník MO, 1981/1982, A–II–2)

Určete všechny n -tice $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kladných reálných čísel, které vyhovují soustavě rovnic

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + \dots + x_n &= \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{4}{x_2} + \dots + \frac{n^2}{x_n} &= n^2(n+1)^2.\end{aligned}$$

$$\left[\text{Řešení: } x_i = \frac{i}{2n(n+1)}, \text{ kde } i = 1, 2, \dots, n. \right]$$

Příklad 23 (57. ročník MO, 2007/2008, A–III–1)

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x + y^2 &= y^3, \\ y + x^2 &= x^3.\end{aligned}$$

$$\left[\text{Řešení: } (x, y) \in \{(0; 0), (\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}); \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5})), (\tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{5}); \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{5}))\} \right]$$

Příklad 24 (61. ročník MO, 2011/2012, A–S–1)

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x + 3y &= 4y^3, \\ y + 3x &= 4x^3.\end{aligned}$$

[Soustava rovnic má 9 řešení, kterými jsou následující uspořádané dvojice (x, y) :

$$\begin{aligned}(0; 0), \quad (1; 1), \quad (-1; -1), \quad (\tfrac{1}{2}\sqrt{2}; -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}), \quad (-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}; \tfrac{1}{2}\sqrt{2}), \\ (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{5}; \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\sqrt{5}), \quad (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\sqrt{5}; \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{5}), \\ (-\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{5}; -\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\sqrt{5}), \quad (-\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\sqrt{5}; -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{5}).\end{aligned}$$

Příklad 25 (62. OM, Polsko, 2010/2011, II–1)

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}(x - y)(x^3 + y^3) &= 7, \\ (x + y)(x^3 - y^3) &= 3.\end{aligned}$$

$$\left[\text{Řešení: } (x, y) = \left(\tfrac{2}{\sqrt[4]{3}}; -\tfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) \text{ a } (x, y) = \left(-\tfrac{2}{\sqrt[4]{3}}; \tfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\right). \right]$$

Příklad 26 (63. OM², Polsko, 2011/2012, II–1)

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}a^3 + b &= c, \\ b^3 + c &= d, \\ c^3 + d &= a, \\ d^3 + a &= b.\end{aligned}$$

[Řešení: $(a, b, c, d) \in \{(0; 0; 0; 0), (\sqrt{2}; -\sqrt{2}; \sqrt{2}; -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}; \sqrt{2}; -\sqrt{2}; \sqrt{2})\}$.]

Příklad 27 (62. OM, Polsko, 2010/2011, II–1)

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}(x - y)(x^3 + y^3) &= 7, \\ (x + y)(x^3 - y^3) &= 3.\end{aligned}$$

[Řešení: $(x, y) = \left(\frac{2}{\sqrt[4]{3}}; -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$ a $(x, y) = \left(-\frac{2}{\sqrt[4]{3}}; \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$.]

Příklad 28 (19. ročník OJM³, 1979/1980)

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}2x + x^2y &= y, \\ 2y + y^2z &= z, \\ 2z + z^2x &= x.\end{aligned}$$

[Řešení: $(x, y, z) = (\operatorname{tg} \frac{k\pi}{7}; \operatorname{tg} \frac{2k\pi}{7}; \operatorname{tg} \frac{4k\pi}{7})$, kde $k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, viz [22].]

Příklad 29 (19. Matematický duel, 2011)

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x^4 + 1 &= 2yz, \\ y^4 + 1 &= 2zx, \\ z^4 + 1 &= 2xy.\end{aligned}$$

[Řešení: $(x, y, z) \in \{(1; 1; 1), (-1; -1; -1)\}$.]

²Olimpiada Matematyczna

³Olympiade junger Mathematiker der DDR

Příklad 30 (59. OM, Polsko, 2007/2008, I-1)

V oboru reálných čísel čísel soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x^5 &= 5y^3 - 4z, \\y^5 &= 5z^3 - 4x, \\z^5 &= 5x^3 - 4y.\end{aligned}$$

[Soustava rovnic má 5 řešení: $(x, y, z) \in \{(-2; -2; -2), (-1; -1; -1), (0; 0; 0), (1; 1; 1), (2; 2; 2)\}$.]

Příklad 31 (20. Matematický duel, 2012)

V oboru celých čísel čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x + \frac{2}{y} &= z, \\y + \frac{4}{z} &= x, \\z - \frac{6}{x} &= y.\end{aligned}$$

[Soustava rovnic má 8 řešení: $(x, y, z) \in \{(-3; 1; -1), (2; 1; 4), (-2; 2; -1), (3; 2; 4), (3; -1; 1), (-2; -1; -4), (2; -2; 1), (-3; -2; -4)\}$.]

Příklad 32 (16. Matematická soutěž Polsko–Rakousko, 1992/1993)

V oboru reálných čísel čísel soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x^3 + y &= 3x + 4, \\2y^3 + z &= 6y + 6, \\3z^3 + x &= 9z + 8.\end{aligned}$$

[Řešení: $(x, y, z) = (2; 2; 2)$.]

Příklad 33 (14. Matematická soutěž Polsko–Rakousko, 1990/1991)

V oboru reálných čísel čísel soustavu rovnic

$$\begin{aligned}(x^2 - 6x + 13)y &= 20, \\(y^2 - 6y + 13)z &= 20, \\(z^2 - 6z + 13)x &= 20.\end{aligned}$$

[Řešení: $(x, y, z) = (4; 4; 4)$.]

4. Neřešené diofantovské rovnice

Příklad 34 (18. Matematický duel, 2010)

Určete všechny dvojice (a, b) přirozených čísel, které vyhovují rovnici

$$4^a = b^2 + 7.$$

[Řešení: $(a, b) = (2; 3)$.]

Příklad 35 (19. Matematický duel, 2011)

Určete všechny dvojice (x, y) přirozených čísel, které vyhovují rovnici

$$(x + y)^2 = 109 + xy.$$

[Řešení: $(x, y) \in \{(5; 7), (7; 5)\}$.]

Příklad 36 (1. Česko–polsko–slovenská matematická soutěž juniorů, 2012)

Určete všechny trojice prvočísel (p, q, r) , které vyhovují rovnici

$$p^2 + pq + q^2 = r^2 + 3.$$

[Řešení: $(p, q, r) = (2; 2; 3)$.]

Příklad 37

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}.$$

[Řešení: $(x, y) \in \{(10; 10), (6; 30), (30; 6), (4; -20), (-20; 4)\}$.]

Příklad 38

V oboru přirozených čísel řešte rovnici

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$$

[Řešení: $(x, y, z) \in \{(3; 3; 3), (2; 4; 4), (4; 2; 4), (4; 4; 2), (2; 3; 6), (2; 6; 3), (3; 6; 2), (3; 2; 6), (6; 2; 3), (6; 3; 2)\}$.]

Příklad 39

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$x + y + xy = 4.$$

[Řešení: $(x, y) \in \{(4; 0), (0; 4), (-2; -6), (-6; -2)\}$.]

Příklad 40 (61. ročník MO, 2011/2012, B–S–1)

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$x^2 + y^2 + x + y = 4.$$

[Řešení: $(x, y) \in \{(1; 1), (1; -2), (-2; 1), (-2; -2)\}$.]

Příklad 41

V oboru celých nezáporných čísel řešte rovnici

$$1 + x + x^2 + x^3 = 2^y.$$

[Řešení: $(x, y) \in \{(0; 0), (1; 2)\}$.]

Příklad 42 (45. Běloruská MO, 1995)

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$x^3 + y^3 = 8^{30}.$$

[Řešení: $(x, y) \in \{(2^{30}; 0), (0; 2^{30})\}$.]

Příklad 43

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$(xy - 7)^2 = x^2 + y^2.$$

[Řešení: $(x, y) \in \{(3; 4), (4; 3), (0; 7), (7; 0)\}$.]

Příklad 44 (5. USAMO, 1976)

V oboru celých nezáporných čísel řešte rovnici

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2b^2.$$

[Řešení: $(x, y, z) = (0; 0; 0)$.]

Příklad 45 (25. ročník MO, 1975/1976, A–III-1)

Určete všechny trojice (x, y, z) celých čísel, pro něž platí

$$x^2 + y^2 = 3z^2.$$

[Řešení: $(x, y, z) = (0; 0; 0)$.]

Příklad 46 (8. USAMO, 1979)

V oboru celých nezáporných čísel řešte rovnici

$$x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{14}^4 = 1\,599.$$

[Rovnice nemá řešení v oboru celých nezáporných čísel.]

Příklad 47

Určete všechna celočíselná řešení rovnice

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 2(x - y)(1 - xy) = 4(1 + xy).$$

[Řešení: $(x, y) \in \{(1; 0), (-3; 2), (0; -1), (-2; 3)\}$.]

Příklad 48 (50. Běloruská MO)

Určete všechna celočíselná řešení rovnice

$$y(x^2 + 36) + x(y^2 - 36) + y^2(y - 12) = 0.$$

[Řešení: $(x, y) \in \{(0; 0), (0; 6), (-8; -2), (1; 4), (4; 4)\}$.]

Příklad 49

V oboru přirozených čísel řešte rovnici

$$x^3 - y^3 = xy + 61.$$

[Řešení: $(x, y) = (6; 5)$.]

Příklad 50

V oboru přirozených čísel řešte rovnici

$$2^a + 2^b + 2^c = 2^d.$$

[$(a, b, c, d) \in \{(n, n, n + 1, n + 2), (n, n + 1, n, n + 2), (n + 1, n, n, n + 2)\}, n \in \mathbb{N}$.]

Seznam použité literatury

- [1] ANDREESCU, T. – ANDRICA, D.: An Introduction to Diophantine Equations. Gil Publishing House, Zalau 2002.
- [2] BERINDE, V.: Exploring, Investigating and Discovering in Mathematics. Birkäuser Verlag, Basel–Boston–Berlin 2004.
- [3] BOTKOVÁ, P.: Metoda nekonečného klesání při řešení diofantovských rovnic (diplomová práce). PřF UP, Olomouc 2009.
- [4] CALDA, E.: Rovnice ve škole neřešené. Praxe učitele matematiky, fyziky a informatiky. Prometheus, Praha 1995.
- [5] CALDA, E.: Středoškolská matematika pod mikroskopem, sbírka řešených úloh. Prometheus, Praha 2006.
- [6] ENGEL, A.: Problem-Solving Strategies. Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg 1998.
- [7] HECHT, T. – SKLENÁRIKOVÁ, Z.: Metódy riešenia matematických úloh. SPN, Bratislava 1992.
- [8] HEJNÝ, M. – KUŘINA, F.: Dítě, škola a matematika. (Konstruktivistické přístupy k vyučování). Portál, Praha 2001.
- [9] HERMAN, J. – KUČERA, R. – ŠIMŠA, J.: Metody řešení matematických úloh I. Masarykova Univerzita, Brno 1996 (2. vydání).
- [10] HORENSKÝ, R. – ŠVRČEK, J.: Řešení rovnic jistého typu a jejich soustav. Matematika–Fyzika–Informatika, roč. 12, 2002/2003, č. 5.
- [11] HRUBÝ, D.: Matematická cvičení pro střední školy. Prometheus, Praha 2008.
- [12] KANEL'-BELOV, A. J. – KOVAL'DŽI, A. K.: Kak rešajut nestandartnyje zadači (rusky). MCBMO, Moskva 1997.
- [13] KOPKA, J.: Ako riešiť matematické problémy. VERBUM – vydavateľstvo Katolickej univerzity v Ružomberku, Ružomberok 2010.
- [14] KUŘINA, F.: Umění vidět v matematice. SPN, Praha 1989.
- [15] KUŘINA, F.: Matematika a řešení úloh. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, České Budějovice 2011.

- [16] LARSON, L. C.: Problem Solving Through Problems. Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg 1983.
- [17] ODVÁRKO, O. – CALDA, E. – ŠEDIVÝ, J. – ŽIDEK, S.: Metody řešení matematických úloh, SPN, Praha 1990.
- [18] PÓLYA, G.: How to Solve It. Doubleday, second edition, 1957.
- [19] SOIFER, A.: Mathematics as Problem Solving (Second Edition). Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg 2009.
- [20] ŠVRČEK, J. – CALÁBEK, P.: Sbírka netradičních matematických úloh. Prometheus, Praha 2007.
- [21] ŠVRČEK, J.: Jak řešit cyklické soustavy rovnic? Matematika–Fyzika–Informatika, roč. 10, 2000/2001, č. 4.
- [22] ŠVRČEK, J.: Goniometrické substituce. Matematika–Fyzika–Informatika, roč. 10, 2000/2001, č. 10.
- [23] ŠVRČEK, J.: The Systems of Cyclic Equations. Mathematics and Informatics Quarterly, Vol 11, 2001, No. 1.
- [24] ŠVRČEK, J.: On Some Type of Systems of Cyclic in the Czech and Slovak Maths Competitions. Canberra: Mathematics Competitions, Australian Mathematics Trust Publishing, 2003, Vol. 16, No. 2.
- [25] TABOV, J. B. – TAYLOR, P. J.: Methods of Problem Solving (Book 1). Australian Mathematics Trust, Canberra 1996.
- [26] TABOV, J. B. – TAYLOR, P. J.: Methods of Problem Solving (Book 2). Australian Mathematics Trust, Canberra 2002.
- [27] TABOV, J. B. – KOLEV, E. M. – TAYLOR, P. J.: Methods of Problem Solving (Book 3). Australian Mathematics Trust, Canberra 2012.
- [28] TAYLOR, P. J.: Tournament of the Towns 1980–1984. Australian Mathematics Trust, Canberra 1993.
- [29] TAYLOR, P. J.: Tournament of the Towns 1984–1989. Australian Mathematics Trust, Canberra 1992.
- [30] TAYLOR, P. J.: Tournament of the Towns 1989–1993. Australian Mathematics Trust, Canberra 1994.
- [31] TAYLOR, P. J. – STOROZHEV A. M.: Tournament of Towns 1993–1997 (Book 4). Australian Mathematics Trust, Canberra 1998.

- [32] STOROZHEV A. M.: Tournament of Towns 1997–2002 (Book 5). Australian Mathematics Trust, Canberra 2006.
- [33] LIU, A. – TAYLOR, P. J.: International Tournament of Towns (Book 6). Australian Mathematics Trust, Canberra 2009.
- [34] TAO, T.: Solving Mathematical Problems. Oxford University Press, New York 2006
- [35] TOLPYGO, A. K.: Tysjača zadač Meždunarodnogo matematičeskogo Turnira gorodov (rusky). MCNMO, Moskva 2009.
- [36] VYŠÍN, J.: Neurčité rovnice. Edice „Brána k vědě“, svazek 3, JČMF, Prometheus, Praha 1949.
- [37] WICKELGREN, W. A.: How to Solve Mathematical Problems. Dover Publishing, New York, 1974.
- [38] ZAWAIRA, A. – HITCHCOCK, G.: A Primer for Mathematics Competitions. Oxford University Press Inc., New York 2009.
- [39] ZEITZ, P.: The Art and Craft of Problem Solving. John Wiley & Sons, Inc., 1999.

Obsah

Úvod	3
Základní použitá označení	4
1. Matematické úlohy a jejich rozdělení	5
2. Metody řešení soustav algebraických rovnic	6
3. Metody řešení diofantovských rovnic	23
4. Neřešené soustavy algebraických rovnic	29
5. Neřešené diofantovské rovnice	33
Literatura	36